Vertiefung: Das Pascal'sche Dreieck

Das Pascal'sche Dreieck besteht aus unendlich vielen Zahlen, die auf eine bestimmte Art angeordnet sind. Die ersten Elemente sind

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & & & \end{array}$$

Aufgabe 1 Setzen Sie das Pascal'sche Dreieck um zwei Zeilen fort. Notieren Sie Regeln für den Aufbau des Pascal'schen Dreiecks.

Aufgabe 2 a) Geben Sie in den ClassPad eine Tabelle ein, in deren Spalte `B` die Werte $\binom{5}{k}$ mit $0 \leqslant k \leqslant 5$ stehen, d. h.

$$\texttt{B1} = \binom{5}{0}, \quad \texttt{B2} = \binom{5}{1}, \quad \dots$$

Tragen Sie analog in Spalte `C` die Werte $\binom{5}{5-k}$ ein. Notieren Sie eine Vermutung.

b) Wiederholen Sie Teil a) mit $\binom{n}{k}$ für unterschiedliche $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leqslant k \leqslant n$. Unterstützen die Ergebnisse Ihre Vermutung? Beweisen Sie es mathematisch. Erklären Sie hiermit die Symmetrie des Pascal'schen Dreiecks.

c) Geben Sie unter der Tabellenkalkulation die folgenden Werte in eine Tabelle ein:

$$\begin{array}{lllll} \binom{0}{0} & & & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \binom{10}{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \binom{10}{10} \end{array}$$

Erklären Sie hiermit das Verhältnis zwischen den Binomialkoeffizienten und dem Pascal'schen Dreieck.

d) Schreiben Sie mithilfe der Ergebnisse des Teils c) einen Zusammenhang zwischen $\binom{n}{k-1}$, $\binom{n}{k}$ und $\binom{n+1}{k}$ auf.
Zeigen Sie rechnerisch, dass er stimmt.

e) Multiplizieren Sie mithilfe des ClassPad die Terme $(x+y)^n$ für verschiedene $n \in \mathbb{N}$ und $x, y > 0$ aus.

> **Hinweis.** Benutzen Sie hierfür `cExpand()` unter two (.

Notieren Sie die Ergebnisse mithilfe von Binomialkoeffizienten.

f) In der Mathematik werden zahlreiche Beweise durch die *vollständige Induktion* über einen Zähler n wie den Exponenten n in Teil e) geführt. Dies bedeutet, dass die Behauptung für $n = 0$ zu zeigen ist. Beweist man die Behauptung für ein beliebiges n und danach, dass sie auch für den um 1 erhöhten Zähler $n + 1$ gilt, so folgt, dass aus der Behauptung bzgl. des Startwerts $n = 0$ die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n+1 = 1$, $(n+1)+1 = 2, \ldots$ gilt. Da man diesen Schritt beliebig oft wiederholen kann, folgt die Behauptung für

$$n = 0 \rightsquigarrow n = 1 \rightsquigarrow n = 2 \rightsquigarrow \ldots$$

Beweisen Sie das Ergebnis aus Teil e) per Induktion über den Exponenten n.